РОССИЙСКИЙ ЖУРНАЛ НАУК О ЗЕМЛЕ, ТОМ 11, RE4001, doi:10.2205/2009ES000436, 2010

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Итоги Электронного Геофизического Года

3–6 июня 2009 • Переславль-Залесский, Россия

Сглаживание временных рядов методами дискретного математического анализа

С. М. Агаян,[1] Ш. Р. Богоутдинов,[1] А. Д. Гвишиани,[1] и А. И. Каган[1]

Получено 25 декабря 2009; принято 12 марта 2010; опубликовано 19 марта 2010.

Дискретный математический анализ (ДМА) – новый подход к дискретным данным, основанный на моделировании с помощью искусственного интеллекта и нечеткой логики дискретных аналогов фундаментальных понятий предела, непрерывности, связности, тренда. Он представляет собой серию алгоритмов, нацеленных на решение основных задач анализа данных: кластеризацию, трассирование, сглаживание и прогнозирование временных рядов, их морфологический анализ, поиск в них трендов и так далее. Все алгоритмы ДМА носят универсальный характер и базируются на конечном пределе. Данная статья посвящена решению проблемы сглаживания временных рядов в рамках ДМА. В результате получено так называемое гравитационное сглаживание, базирующееся на методах искусственного интеллекта и нечеткой логики. Приведено его сравнение с вейвлет-сглаживанием. *КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Дискретный математический анализ; гравитационное сглаживание; невязка гладкости.*

Ссылка: Агаян, С. М., Ш. Р. Богоутдинов, А. Д. Гвишиани, и А. И. Каган (2010), Сглаживание временных рядов методами дискретного математического анализа, *Росс. ж. наук о Земле, 11,* RE4001, doi:10.2205/2009ES000436.

Введение

Дискретный математический анализ (ДМА) – новый подход к дискретным данным, основанный на моделировании с помощью искусственного интеллекта (ИИ) и нечеткой логики (НЛ) дискретных аналогов фундаментальных понятий предела, непрерывности, связности, тренда. ДМА реализован в серии алгоритмов, имеющих универсальный характер, базирующихся на единой формальной основе и отвечающих на основные вопросы анализа данных. На Рис. 1 приведена схема ДМА. Настоящая работа посвящена ДМА-сглаживанию (алгоритму “Равновесие”).

Общая концепция

ДМА-сглаживание. Обозначим через $BP[a,b]$ пространство временных рядов на дискретном отрезке $[a,b]$ с узлами $t_i = a+(i-1)h$, $h=(b-a)/n$, $i=1,...,n$. Так что $|[a,b]| = n$. Элементы пространства $BP[a,b]$ обозначаются буквами x, y, z, ... Если $x \in BP[a,b]$, то $x_i = x(t_i)$ и $x \sim (x_i)|_1^n \in \mathrm{R}^n$, следовательно, $BP[a,b]$ – n-мерное пространство.

Пусть задан временной ряд $y \in BP[a,b]$. Рассматривается следующая задача: для y построить “гладкий скелет” (сглаживание $\equiv$ гладкое динамическое равновесие) $x = Sm(y) \in BP[a,b]$.

В ДМА исходят из следующей логики его построения: “x – гладкий скелет для y” $\equiv$ (x – гладкий временной ряд) $\wedge$ (x – приближение y).

Функционал сглаживания. Идея гладкости формализуется квадратичным функционалом $CGr(x) = (Gx, x)$, называемым невязкой гладкости. Она является числовым выражением отклонения поведения дискретной функции от “идеально гладкого” ($\equiv G$-гладкого) на $[a,b]$, и в чистом виде служить основой сглаживания не может в силу излишней своей строгости. Для нее требуется вторая половина. Ею является функционал сглаживания $Sc(x|y)$, формализующий идею приближения: $Sc(x|y) = \|y-x\|^2$. Итоговый функционал сглаживания $Sm(x|y)$ для ряда y есть одно из линейных λ-соединений упомянутых выше функционалов:

$$Sm(x|y) = Sm_\lambda(x|y) =$$

[1]Геофизический центр РАН, Москва, Россия

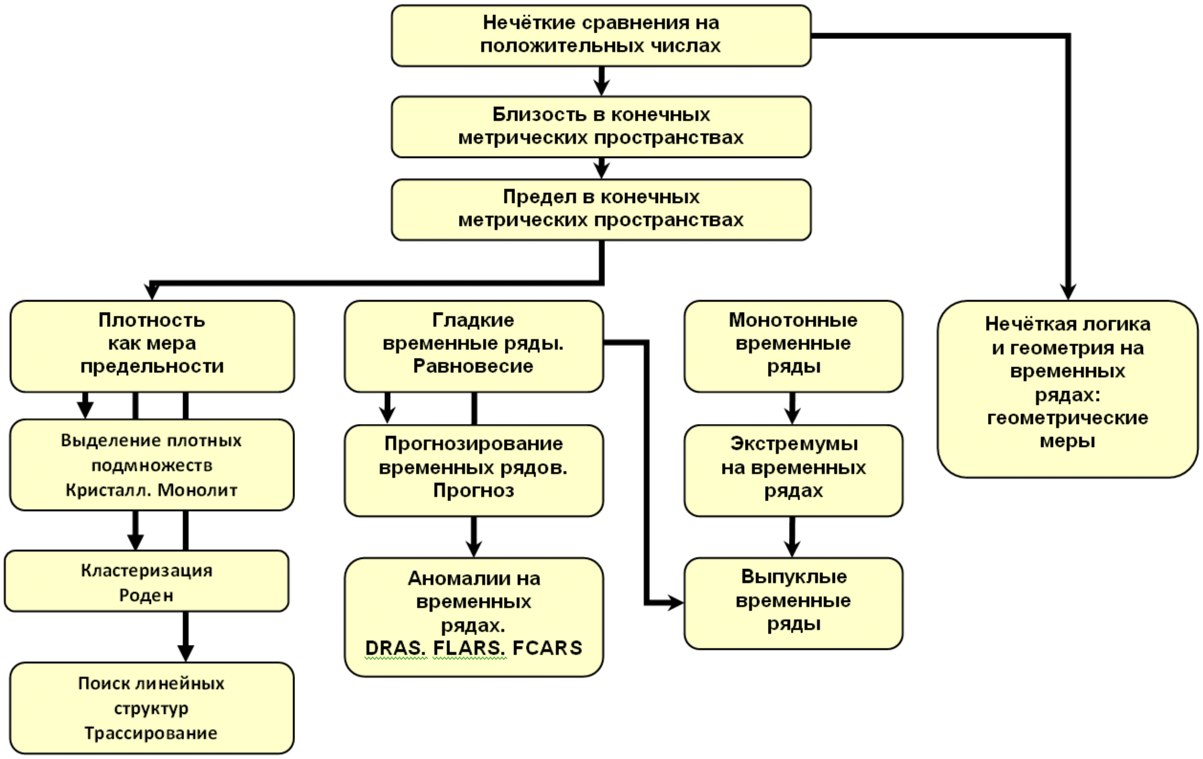

Рис. 1. Схема дискретного математического анализа.

$$\lambda CGr(x) + (1-\lambda)Sc(x|y), \quad \lambda \in [0,1]$$

Функционал $Sm_\lambda(x|y)$ является неотрицательным и квадратичным на $\mathrm{R}^n = BP[a,b]$ и потому достигает своего минимума x^* в единственной точке, которая и будет искомым λ-сглаживанием для y: $x^* \stackrel{\text{def}}{=} Sm_\lambda y$. Таким образом, поиск гладких скелетов сводится к минимизации функционала $Sm_\lambda(x|y)$, то есть к решению линейной системы n-го порядка:

$$x^* = Sm_\lambda y \Leftrightarrow \mathrm{Grad}Sm_\lambda(x^*|y) = 0$$

Найдем градиент $\mathrm{Grad}Sm_\lambda(x|y)$ в явном виде. Для этого преобразуем $Sm_\lambda(x|y)$:

$$Sm_\lambda(x|y) = \lambda(Gx,x) + (1-\lambda)\|x-y\|^2 =$$

$$\lambda(Gx,x) + (1-\lambda)(x-y, x+y) =$$

$$\lambda(Gx,x) + (1-\lambda)(x,x) - 2(1-\lambda)(x,y) +$$

$$(1-\lambda)\|y\|^2 = ((\lambda G + (1-\lambda)E)x, x) -$$

$$2(1-\lambda)(x,y) + (1-\lambda)\|y\|^2$$

Следовательно, минимизация $Sm_\lambda(x|y)$ равносильна минимизации функции

$$Sm_\lambda(x|y) = \frac{1}{2}((\lambda G + (1-\lambda)E)x, x) - ((1-\lambda)y, x)$$

Для нее градиент в точке x выражается через G следующим образом [*Пшеничный и Данилин*, 1975]:

$$\mathrm{Grad}Sm_\lambda(x|y) = (\lambda G + (1-\lambda)E)x - (1-\lambda)y$$

Следовательно,

$$x^* = Sm_\lambda y \Leftrightarrow (\lambda G + (1-\lambda)E)x^* = (1-\lambda)y$$

Невязка гладкости. В качестве основы каждой такой невязки берется то или иное свойство непрерывных функций, имеющее естественное дискретное выражение. Отклонение от этого свойства рядом x на отрезке $[a,b]$ должно быть в ДМА квадратичной формой (Gx,x) и представляет собой нулевой уровень невязки гладкости. Перейдем к строгому определению.

Невязка гладкости: нулевой уровень – форма (G^0x,x), причем $G^0 = G[a,b]$ (это означает, что G^0

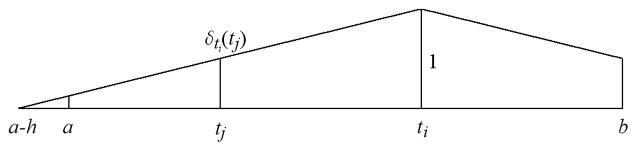

Рис. 2. График функции $\delta_{t_i}(t_j)$.

определен на $BP[a,b]$). Области определения в дальнейшем будут ясны и потому будут опускаться по умолчанию: $CG^0x \overset{\text{def}}{=} (G^0x, x)$.

Невязка гладкости: s-ый уровень. Пусть D^s – оператор дифференцирования s-го порядка D^s: $BP[a,b] \to BP[a,b^s]$, $x^s = D^s x$ – s-ая производная функции x: $x^s \in BP[a, b^s = b - sh] = \mathrm{R}^{n-s}$

$$x^s(t_i) = \frac{\sum_{l=0}^{s}(-1)^{s-l}C_l^s x_{i+l}}{h^s}, \qquad t_i \in [a, b^s]$$

Функционалом $CG^s(x)$ s-ой гладкости ряда x будем считать невязку непрерывности его s-ой производной x^s

$$CG^s(x) \overset{\text{def}}{=} CG^0(x^s) = (G^0 D^s x, D^s x) =$$

$$(D^{s*}G^0 D^s x, x) = (G^s x, x)$$

где $G^s(x) \overset{\text{def}}{=} D^{s*}G^0 D^s$.

Невязка гладкости: итоговый уровень. Она является взвешенным итогом предыдущих:

$$CG(x) = \sum_{s=0}^{n-1} w_s CG^s(x)$$

где w_s – неотрицательные веса (параметры сглаживания). Таким образом, $CG(x) = (Gx, x)$, $G = \sum_{s=0}^{n-1} w_s G^s$.

Гравитационное сглаживание. Оператор дискретной непрерывности G^0 представляет собой результат дискретной интерпретации математической непрерывности. Таких операторов в ДМА несколько. Рассмотрим один из них.

Пусть f обычная непрерывная в точке c функция, тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$:

$$\left| f|_{[c-\delta, c+\delta]} - f(c) \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{2\delta} \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)dt - f(c) \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)dt = f(c)$$

Таким образом, из обычной непрерывности в точке следует последнее равенство, которое естественно назвать гравитационной непрерывностью в ней. Последняя уже переводится на дискретный язык. Сделаем это.

В ДМА окрестность узла t_i заменяется моделью обзора δ_{t_i} в ней. Она является нечеткой структурой на $[a,b]$, выражающей свойство близости к t_i: $\delta_{t_i}(t_j)$ – степень близости t_j к t_i на $[a,b]$. Всегда справедливо $\delta_{t_i}(t_j) \in [0,1]$ и $\delta_{t_i}(t_i) = 1$. Пример:

$$\delta_{t_i}(t_j) = 1 - \frac{|t_j - t_i|}{\max(|t_i - a|, |t - b|) + h}$$

График функции $\delta_{t_i}(t_j)$ представлен на Рис. 2.

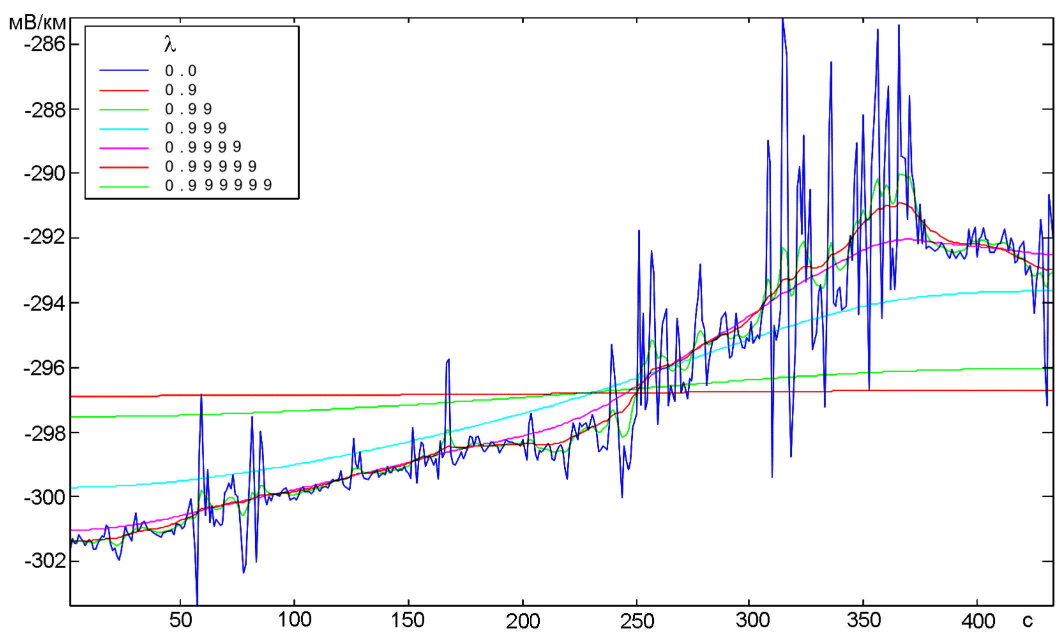

Рис. 3. Гравитационное сглаживание. Зависимость от λ.

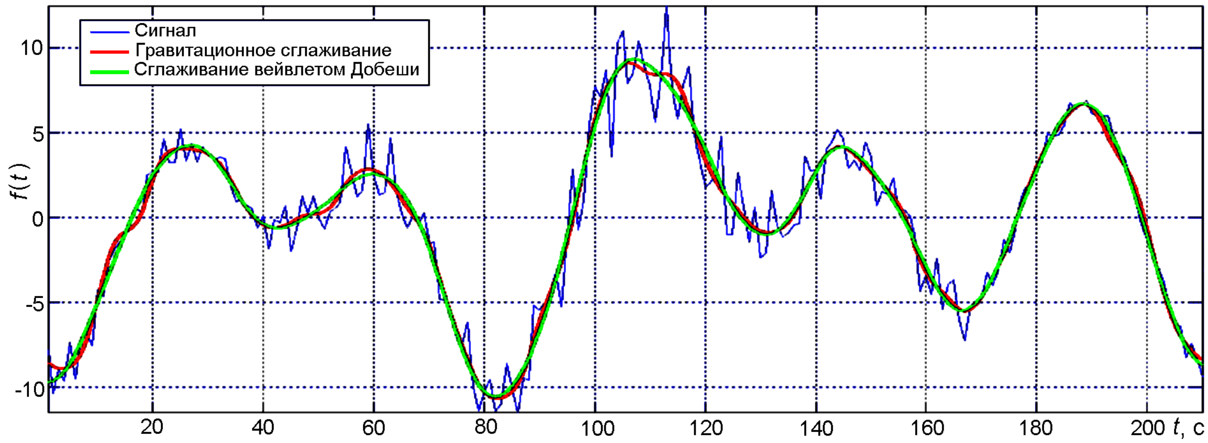

Рис. 4. Сравнение гравитационного сглаживания со сглаживанием вейвлетом Добеши. Пример 1.

Свяжем с δ квадратную матрицу n-го порядка $A = A(\delta) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n)$:

$$a_{ij} = \frac{\delta_i(j)}{\sum_{j=1}^{n} \delta_i(j)}$$

Тогда дискретное выражение гравитационной непрерывности ряда x в узле t_i означает равенство $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, а потому отклонение $CGr(x)(t_i)$ от него нужно считать невязкой гравитационной непрерывности x в t_i: $CGr(x)(t_i) = (x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2$. Общая невязка непрерывности $CGr^0(x)$ для x на $[a, b]$ будет иметь вид:

$$CGr^0(x) = \sum_{i=1}^{n} CGr(x)(t_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 =$$
$$((A-1)x, (A-1)x) = (Gr^0 x, x)$$

Таким образом, для дискретной гравитационной непрерывности

$$Gr^0 = G(\delta) = (A(\delta)-1)^*(A(\delta)-1)$$

Согласно общей концепции полная невязка $CGr(x)$ для x на $[a, b]$ определяется самосопряженным оператором $\sum_{s=0}^{n} w_s Gr^s$, где $G^s = G(\delta^s)$

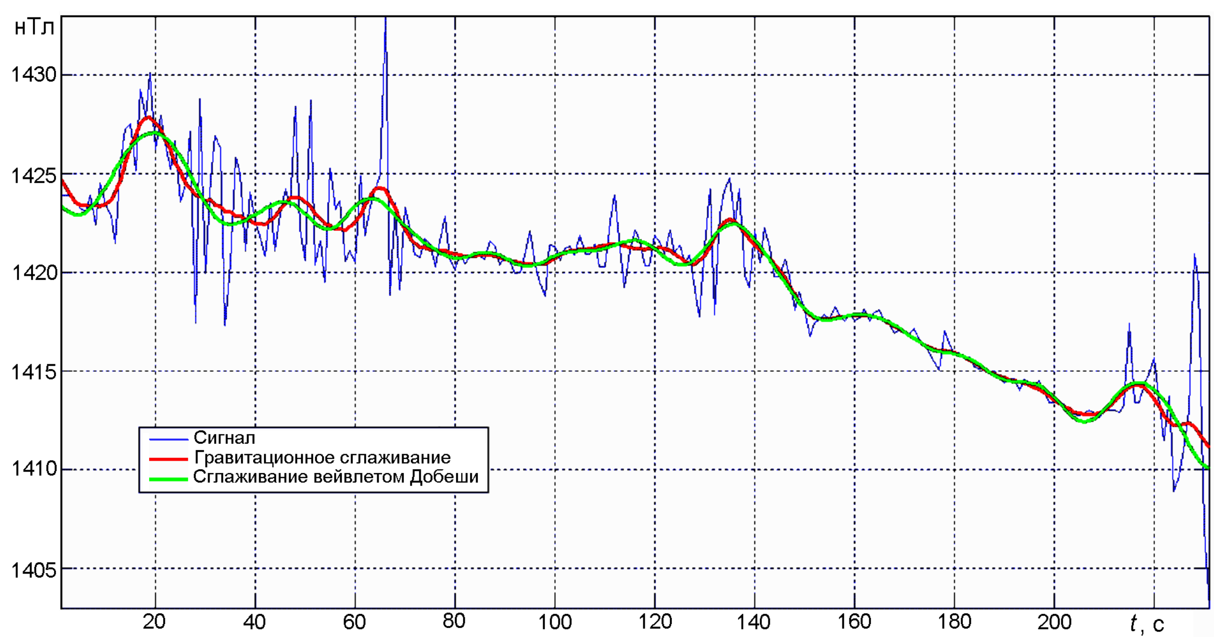

Рис. 5. Сравнение гравитационного сглаживания со сглаживанием вейвлетом Добеши. Пример 2.

$$CGr(x) = \sum_{s=0}^{n-1} w_s CGr^s(x) = \sum_{s=0}^{n-1} w_s (G^s x, x) =$$

$$((\sum_{s=0}^{n-1} w_s G^s) x, x)$$

Примеры. Остановимся на нескольких примерах такого сглаживания. Первый из них иллюстрирует зависимость $Sm_\lambda x$ от λ (Рис. 3).

В следующих двух примерах показывается сравнение гравитационного сглаживания с вейвлет-сглаживанием. Вейвлет-сглаживание строилось по базису вейвлета Добеши 6-го порядка (Рис. 4 и Рис. 5) [*Добеши*, 2001].

Как видно из приведенных примеров, гравитационное сглаживание при одинаковой с вейвлетом Добеши гладкостью обладает большей сканируемостью. Справедливости ради отметим, что вейвлеты с вычислительной точки зрения более просты.

Литература

Пшеничный, Б. Н., Ю. М. Данилин (1975), *Численные методы в экстремальных задачах,* Наука, Москва.

Добеши, И. (2001), *Десять лекций по вейвлетам, пер. с англ. Е. В. Мищенко, под ред. А. П. Петухова,* РХД, Москва.

С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. Д. Гвишиани, А. И. Каган, Геофизический центр РАН, ул. Молодежная 3, 119296 Москва, Россия. (a.kagan@gcras.ru)